UNIVERSIDAD
DE SALAMANCA

Análisis Complejo I

3° Grado en Matemáticas

Jesús Rodríguez Lombardero

10 de septiembre de 2021

Índice general

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1. Notación y definiciones

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un cuerpo ordenado; esto implica que no hay ningún número real cuyo cuadrado sea negativo, por lo que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales. De aquí surge la necesidad de ampliar el cuerpo de los números reales y construir un cuerpo en el que toda ecuación de segundo grado tenga solución.

Dada la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a \neq 0$, dividiendo por a y completando el cuadrado se puede escribir como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Si el segundo sumando es no negativo o, lo que es lo mismo, si $b^2 - 4ac \geq 0$, la ecuación tiene solución real; en caso contrario, si excribimos

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}, \qquad y = \frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

la ecuación anterior se transforma en

$$\alpha^2(y^2 + 1) = 0,$$

de modo que si resolvemos la ecuación $y^2 + 1 = 0$ podremos resolver cualquier ecuación de segundo grado.

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Si llamamos i a una solucíón de la ecuación $y^2 + 1 = 0$, entonces $-i$ será otra solución, luego la ecuación se escribiría como

$$y^2 + 1 = (y - i)(y + i),$$

de donde se deduce que no puede tener más soluciones, puesto que si y_0 fuera una solución sería $(y_0 - i)(y_0 + i) = 0$ y por tanto uno de los dos factores sería 0.

Se suele construir el cuerpo de los números complejos como el conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado de las operaciones

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Es fácil comprobar que estas operaciones dotan a $\mathbb{R}^2$ de estructura de cuerpo; $\mathbb{R}$ es el subcuerpo formado por los pares $(a, 0)$, el elemento unidad el el número real 1, representado como el par $(1, 0)$ y la unidad imaginaria, i, es el par $(0, 1)$.

Denotaremos $a + bi$ al par (a, b); definimos entonces

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\};$$

Con esta notación, definimos en $\mathbb{C}$ las operaciones de suma y producto extendiendo las de $\mathbb{R}$; si escribamos $z = a + bi$; si $z' = a' + b'i$, definimos

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

$$zz' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

Con estas operaciones $\mathbb{C}$ es un anillo; además cada elemento $z = a + bi \neq 0$ tiene un inverso, a saber,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + y^2} - \frac{b}{a^2 + y^2}i,$$

luego $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo. Éste es el conjunto de los números complejos, el mínimo cuerpo que contiene a $\mathbb{R}$ y en el que todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución. De hecho, el teorema fundamental del álgebra asegura que toda ecuación algebraica con coeficientes complejos tiene solución en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Si $z = a+bi$, llamaremos a a y b partes real e imaginaria de z, respectivamente, $a = \mathrm{Re}(z), b = \mathrm{Im}\,(z)$.

$\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z &\longmapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}\,(z)) \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal; por tanto, los números complejos se representan en el plano.

Definimos el módulo de un número complejo $z = x + iy$ como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, es decir, como la distancia euclídea del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ al origen. La aplicación que asigna a cada $z \in \mathbb{C}$ el número real $|z|$ es una norma, lo que permite dotar a $\mathbb{C}$ de una topología; de hecho, cuando $\mathbb{C}$ se identifica con $\mathbb{R}^2$, el módulo es la norma euclídea habitual del plano.

Si $z = x + iy$, su conjugado es $\overline{z} = x - iy$; entendida en el plano, la conjugación es la simetría respecto del eje de abscisas (el eje real).

1.2. Forma polar de un número complejo

Denotemos (r, θ) a las coordenadas polares en el plano $\mathbb{R}^2$; las ecuaciones del cambio de coordenadas son $x = r\cos(\theta), y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$; si escribimos $z = x + iy$, entonces $r = |z|$, distancia del punto (x, y) al origen, y θ es el ángulo que forman el semieje real positivo y el segmento que une el origen con z. θ se llama argumento de z, $\theta = \arg(z)$, y no es una función, sino que está determinado salvo un múltiplo entero de 2π.

Si usamos la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta),$$

entonces

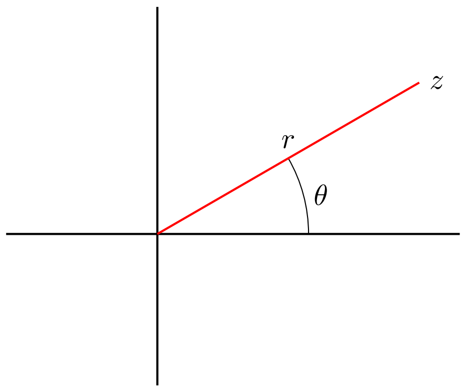
$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Otra notación habitual, si no queremos usar la exponencial compleja, es

$$\operatorname{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta),$$

de modo que

$$z = |z|\operatorname{cis}(\theta).$$



De las fórmulas de adición de águlos se deduce que

$$\operatorname{cis}(\theta + \varphi) = \operatorname{cis}(\theta)\operatorname{cis}(\varphi),$$

es decir, cis es un morfismo de grupos entre el grupo aditivo de los números reales y el grupo multiplicativo $\mathbb{T}$ de los números complejos de módulo 1 (la circunferencia unidad en el plano). De hecho es un epimorfismo de grupos cuyo núcleo es $\ker(\operatorname{cis}) = 2\pi\mathbb{Z}$, luego $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

En particular se verifica la fórmula de Abraham de Moivre

$$\operatorname{cis}(n\theta) = \operatorname{cis}(\theta)^n$$

que expresa $\operatorname{sen}(n\theta)$ y $\cos(n\theta)$ como polinomios en $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$.

Si escribimos los números complejos en forma polar,

$$z = r\operatorname{cis}(\theta), \qquad w = s\operatorname{cis}(\varphi),$$

entonces

$$zw = rs\operatorname{cis}(\theta + \varphi);$$

por tanto, el significado geométrico del producto por z es hacer la homotecio de centro el origen y razón r y luego un giro de ángulo θ en sentido antihorario.

Si escribimos $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$, diremos que el ángulo θ es un argumento de z. De la periodicidad de las funciones trigonométricas se deduce que al argumento de un número complejo no es único; si θ es un argumento de z, todos sus argumentos son el conjunto

$$\{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Una determinación del argumento es una función $\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada número complejo no nulo uno de sus argumentos dentro de un intervalo semiabierto de longitud 2π. Llamaremos argumento principal al que corresponde al intervalo $(-\pi, \pi]$; se suele denotar con mayúscula, $\mathrm{Arg}(z)$. Es una función continua en el abierto de $\mathbb{C}^*$ complementario del semieje real negativo; en esta semirrecta tiene una discontinuidad de salto.

El argumento es un ejemplo de lo que se conoce como funciones multiformes, que se pueden interpretar como funciones ordinarias mediante la teoría de revestimientos. Retomaremos este tema cuando estudiemos el logaritmo complejo.

1.3. Raíces de la unidad

Consideremos el problema siguiente: dados un número complejo $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ y un número natural $n \geq 2$, ¿cuántos números complejos w verifican que $w^n = z$?, es decir, ¿Cuántas raíces n-ésimas tiene un número complejo no nulo?

Si escribimos z en forma polar, $z = |z|\,\mathrm{cis}(\theta)$, entonces una raíz n-ésima de z es

$$w = |z|^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right),$$

pero ésta no es la única solución, puesto que $w_1 = |z|^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$ también verifica ue $w_1^n = z$; el problema se reduce a calcular las raíces n-ésimas de la unidad.

Como $\mathrm{cis}(2k\pi) = 1$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathrm{cis}(\theta)^n = \mathrm{cis}(n\theta)$, resulta que

$$\mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \mathrm{cis}(2k\pi) = 1 \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z};$$

teniendo en cuenta la periodicidad de las funciones trigonométricas resulta que

$$\mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{cis}\left(\frac{2l\pi}{n}\right) \qquad \Longleftrightarrow\ k \equiv l \quad \text{mód } n\mathbb{Z},$$

luego hay exactamente n raíces n-ésimas de la unidad, a saber,

$$\mathbb{T}_n = \left\{\mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) : 0 \leq k \leq n-1\right\}.$$

Volviendo al caso general, todas las raíces n-eímas de z son

$$|z|^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

El conjunto $\mathbb{T}_n$ de las raíces n-ésimas de la unidad es un grupo multiplicativo; geométricamente se obtienen dividiendo la circunferencia unidad en n partes iguales (ciclotomía), de ahí el nombre de grupo cíclico. $\mathbb{T}_n$ es un grupo cíclico generado por cualquiera de los elementos

$$\mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad \text{m.c.d.}(k, n) = 1.$$

Capítulo 2

Cálculo diferencial e integral

2.1. Funciones derivables en sentido complejo. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo, la noción de derivada que conocemos para funciones reales se puede generalizar a funciones complejas.

Definición 2.1.1. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función; diremos que f es derivable en el punto $z \in U$ en sentido complejo, o $\mathbb{C}$-derivable, si existe

$$f'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w},$$

límite al que llamaremos derivada de f en z.

Igual que para funciones reales de una variable real se puede demostrar que toda función derivable en un punto es continua en dicho punto. Además, la aplicación que asigna a cada función su derivada en un punto z es $\mathbb{C}$-lineal y se verifican las reglas de derivación de productos y cocientes, así como la regla de la cadena, de modo análogo al caso real.

Se puede definir la derivada de f en z con un vector $w \in \mathbb{R}^2$ como

$$D_w f(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z+tw) - f(z)}{t}$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Cuando $|w| = 1$ tenemos la derivada direccional.

Si f es derivable en z en sentido complejo, el límite anterior es igual a $wf'(z)$.

El plano complejo se identifica con $\mathbb{R}^2$, de modo que la función f se puede considerar como una aplicación entre abiertos de $\mathbb{R}^2$. Denotaremos (x, y) a las coordenadas reales de $\mathbb{R}^2$, y $z = x + iy$ a la coordenada compleja cuando se identifica con $\mathbb{C}$. Si escribimos $f = u + iv$ y esta función es derivable en sentido complejo en $z \in U$, tomando $t \in \mathbb{R}, w = 1$ en el límite queda

$$f'(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

y para $w = i$,

$$f'(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{it} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Comparando ambas expresiones se observa que para que f sea derivable en sentido complejo en U sus componentes reales u y v han de tener derivadas parciales y además deben cumplirse las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.1}$$

que se conocen como ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Vamos a relacionar la derivabilidad de una función en sentido complejo con su diferenciabilidad como función entre abiertos del plano.

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-derivable en un punto $z \in U$, entonces es $\mathbb{C}$-diferenciable, es decir, existe una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $d_z f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z+w) = f(z) + d_z f(w) + o(w),$$

donde $\lim\limits_{w\to 0} \frac{o(w)}{w} = 0$. Como en el caso real, $d_z f$ es la homotecia de razón $f'(z)$, de modo que podemos escribir

$$f(z+w) = f(z) + f'(z)w + o(w).$$

Escribamos esta expresión en forma real; si $f'(z) = a + ib$ y $w = h + ik$, entonces

$$f'(z)w = (ah - bk) + i(ak + bh)$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que f es diferenciable en (x, y) como aplicación entre abiertos de $\mathbb{R}^2$, siendo su diferencial la aplicación lineal dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

y además verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann. El recíproco también es cierto, como se puede comprobar fácilmente, luego hemos demostrado la siguiente

Proposición 2.1.2. *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función y $z = x + iy$ un punto de U. La función f es $\mathbb{C}$-derivable en z si y sólo si es diferenciable en (x, y) como aplicación entre abiertos del plano y además verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

De la discusión anterior se deduce que si f es derivable en sentido complejo en z, entonces

$$|d_z f| = u_x(x,y)^2 + v_x(x,y)^2 = u_y(x,y)^2 + v_y(x,y)^2 = |f'(z)|^2.$$

El espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, que además es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2.

Extendemos por linealidad sobre $\mathbb{C}$ la diferencial ordinaria, de modo que si $f = u + iv$ es una aplicación de un abierto u de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{C}$ escribiremos $df = du + idv$. Los valores de du y dv en cada punto de U forman una base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$; otra base de este espacio vectorial está formada por los valores de $dz = dx + idy, d\overline{z} = dx - idy$; vamos a expresar df en esta base.

$$df = du + idv = u_x\, dx + u_y\, dy + i(v_x\, dx + v_y\, dy) = (u_x + iv_x)\, dx + (u_y + iv_y)\, dy = f_x\, dx + f_y\, dy$$

y, teniendo en cuenta que

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}), \qquad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z})$$

queda

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\overline{z};$$

Si definimos los operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

entonces podemos escribir

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z}.$$

Con estas notaciones, si f es derivable en sentido complejo las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.1) se escriben

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

y por tanto

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz.$$

2.2. Integración de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

Consideremos una aplicación $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. la noción de derivabilidad en un punto es idéntica a la dada para funciones reales o complejas; además si $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales, la condición necesaria y suficiente para que f sea derivable en un punto $t \in I$ es que lo sean u y v, en cuyo caso $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$.

Las reglas habituales de derivación siguen siendo válidas para este caso, con la misma demostración; en cuanto a la regla de la cadena, se puede aplicar a $g \circ f$ cuando esta composición de funciones tiene sentido, es decir, cuando f valora en $\mathbb{R}$ y g es de variable real o bien cuando f valora en $\mathbb{C}$ y g es de variable compleja.

Veamos ahora cómo se define la integral de Riemann para funciones complejas definidas en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u+iv$, se puede definir su integral de Riemann mediante las sumas de Riemann, igual que en el caso de funciones reales, o bien extendiendo la integral de Riemann por $\mathbb{C}$-linealidad, es decir, escribiendo

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt.$$

Las propiedades de la integral son análogas a las del caso real: la aplicación que asigna a cada función su integral en $[a, b]$ es $\mathbb{C}$-lineal, las funciones integrables son aquellas cuyo conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida nula; además se verifica que el módulo de una función integrable es integrabie y

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

También se puede generalizar a este caso el teorema fundamental del cálculo y, como consecuencia, la regla de Barrow y los teoremas de cambio de variables e integración por partes.

2.3. Curvas complejas

Definición 2.3.1. Una curva compleja (parametrizada) es una aplicación $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Habitualmente supondremos que I es un intervalo conpacto y que γ es continua.

Ejemplos. 1. Dados dos puntos $z, w \in \mathbb{C}$, el segmento que los une admite la parametrización

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (1 - t)z + tw \end{aligned}$$

2. La circunferencia centrada en un punto z_0 y de rdio $r > 0$ se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \gamma(t) = z_0 + re^{it} \end{aligned}$$

Diremos que una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es simple si es inyectiva en $[a, b)$ y que es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva continua, simple y cerrada es una curva de Jordan.

Definición 2.3.2. Diremos que una curva continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^1 a trozos si es de clase C^1 salvo en un número finito de puntos de $[a, b]$, en los que existen las derivadas laterales.

Si Γ es una curva en $\mathbb{C}$, cada parametrización de Γ induce una orientación, es decir, un sentido de recorrido de la curva. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia unidad la parametrización que hemos dado en el ejemplo 2 la recorre en sentido antihorario, mientras que la parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = z_0 + re^{i(2\pi - t)t} \end{aligned}$$

la recorre en el sentido de las agujas del reloj.

Definición 2.3.3. Dadas dos curvas parametrizadas de clase C^k, $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{C}$, diremos que φ es una reparametrización de γ si existe un isomorfismo de clase C^k $\sigma : J \longrightarrow I$ tal que $\varphi = \gamma \circ \sigma$.

La reparametrización establece una relación de equivalencia entre las curvas parametrizadas de clase C^k; cada clase de equivalencia representa una curva plana como objeto geométrico, es decir, como subconjunto de $\mathbb{C}$.

Con las notaciones de la definición anterior, si la reparametrización σ es creciente conservará la orientacion de la curva, mientras que si es decreciente la cambia.

2.4. Integrales de línea en el plano complejo

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1 en U y γ la imagen de γ. Si ω es una 1-forma (real) en U, recordemos que su integral sobre Γ es

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega).$$

En coordenadas, si $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, si escribimos $\gamma^*(x) = x(t), \gamma^*(y) = y(t)$, entonces

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b [P(x, y)x'(t) + Q(x, y)y'(t)]\, dt;$$

del teorema de cambio de variable para integrales de Riemann se deduce que la integral es independiente de la parametrización, siempre que ésta conserve la orientación de la curva.

Identifiquemos U con un abierto de $\mathbb{C}$, sea $z = x + iy$ y extendamos γ^* y la integral por $\mathbb{C}$-linealidad. Si $\omega = f(z)\, dz + g(z)\, d\overline{z}$ es una 1-forma compleja de clase C^1 en U, definimos

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega).$$

En coordenadas,

$$\begin{aligned} dz = dx + idy \quad &\Longrightarrow \quad \gamma^*(dz) = [x'(t) + iy'(t)]dt = \gamma'(t)dt \\ d\overline{z} = dx - idy \quad &\Longrightarrow \quad \gamma^*(d\overline{z}) = [x'(t) - iy'(t)]dt = \overline{\gamma'(t)}dt \end{aligned}$$

y de aquí se deduce la expresión de $\int_\Gamma \omega$. Como en el caso real, la integral de línea es independiente de la parametrización, siempre que ésta conserve la orientación.

Aplicando el teorema de Green (teorema de Stokes para el plano) a las partes real y compleja de una 1-forma de clase C^1 se obtiene el teorema de Green complejo:

Teorema 2.4.1. *Sena U un abierto de $\mathbb{C}$, ω una 1-forma compleja de clase C^1 en U y V un abierto de cierre compacto contenido en U que sea una subvariedad con borde regular de clase $\mathbb{C}^1$ a trozos. Entonces*

$$\int_{\partial V} \omega = \int_{\overline{V}} d\omega.$$

Ejercicios. 1. Calcular la integral de la 1-forma $\omega = \dfrac{dz}{z}$ sobre la circunferencia unidad.

2. Sean Γ_1 el segmento que une el origen con el punto $1 + i$ y Γ_2 el arco de parábola $y = x^2$ entre los mismos puntos.Calcular la integral de $\omega = z\, dz$ sobre ambas curvas. ¿Por qué $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$?

Capítulo 3

Funciones analíticas

3.1. Sucesiones y series de funciones

A lo largo de esta sección X será un conjunto cualquiera, salvo que se especifique alguna estructura adicional, y $\mathbb{K}$ denotará al cuerpo de los números reales o al de los complejos.

Definición 3.1.1. Diremos que una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de X en $\mathbb{K}$ converge puntualmente a una función $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ si para cada punto $x \in X$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$.

Si existe, el límite puntual es único, como consecuencia de la unicidad del límite de una sucesión numérica.

La convergencia puntual no conserva ciertas propiedades importantes de las funciones, como la acotación, continuidad o integrabilidad.

Ejemplo. Consideremos la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$$

Las funciones f_n son continuas y su límite punto a punto es la función f definida como

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

que no es continua.

Definición 3.1.2. Una sucesión de funciones $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ converge uniformemente a una función f si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para cada $n \geq n_0$ se verifica:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in X$$

Es obvio que si una sucesión de funciones converge uniformemente también converge puntualmente.

Ejemplo. La sucesión de funciones $\left\{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}\right\}$ converge uniformemente a la función constante 0, puesto que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

y esta sucesión numérica tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

Es fácil comprobar que la sucesión de funciones dada en el ejemplo de la página anterior no converge uniformemente, lo cual demuestra que la convergencia puntual no implica la uniforme.

Proposición 3.1.3 (Criterio de Cauchy)**.** *La condición necesaria y suficiente para que una sucesión de funciones $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ converja uniformemente en X es que para cada $\varepsilon > 0$ exista un número natural n_0 tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para $m, n \ge n_0$ y para cada $x \in X$.*

Demostración. La necesidad de la condición es inmediata aplicando la definición de límite y la desigualdad triangular. Recíprocamente, si se verifica la condición del enunciado, entonces para cada $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego convergente; definimos $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Si $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $x \in X$; tomando límite cuando $m \to \infty$ queda

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para cada $x \in X$, lo que prueba que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f. □

Sea E el espacio vectorial de las funciones acotadas de X en $\mathbb{K}$; la aplicación

$$\begin{aligned} \|\ \|_\infty : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \end{aligned}$$

es una norma, y la proposición anterior prueba que $(E, \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Proposición 3.1.4. *Sea X un espacio opológico. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{K}$ que converge uniformemente a una función f, entonces f es continua.*

Demostración. Por definición de convergencia uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para $n \ge n_0$ y para cada $x \in X$; por otra parte, como cada f_n es continua, dado cualquier punto $a \in X$ existe un entorno U de a tal que $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $x \in U$. Entonces, si $\ge n_0$ y $x \in U$ se tiene:

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a)| - f(a)| < \varepsilon,$$

lo que demuestra la continuidad de f. □

Proposición 3.1.5. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables-Riemann en un intervalo compacto $[a, b]$ que converge uniformemente a una función f. Entonces f es integrable-Riemann en $[a, b]$ y además*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Demostración. Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua, el conjunto de puntos de discontinuidad de f será la unión de los conjuntos de puntos de discontinuidad de las funciones f_n, y por tanto de medida nula, por el criterio de integrabilidad de Lebesgue.

Sea $\varepsilon > 0$; como $\{f_n\}$ converge a f uniformemente, existe n_0 tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

para $n \geq n_0$ y para cada $x \in [a,b]$. Entonces para $n \geq n_0$ tenemos:

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

de donde se concluye. □

Veamos ahora la relación entre el límite uniforme y la derivabilidad, aunque, en realidad, la proposición siguiente no afirma la conservación de las derivadas por límites uniformes, sino la conservación de primitivas.

Proposición 3.1.6. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de clase C^1 en un intervalo $[a,b]$ tal que para algún punto $x_0 \in [a,b]$ la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ es converente. Si $\{f_n'\}$ converge uniformemente a una función g, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a una primitiva de g.*

Demostración. La función g es continua por ser límite uniforme de una sucesión de funciones continuas. Sea f una primitiva de g en $[a,b]$; sumándole una constante podemos suponer que $f(x_0) = \lim f_n(x_0)$.

Dados $\varepsilon > 0$ y $x \in [a,b]$, del teorema del valor medio aplicado a la función $f_n - f$ se deduce que existe un punto c entre x y x_0 tal que

$$|f_n(x)-f(x)| \leq |f_n(x)-f(x)-f_n(x_0)+f(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| \leq |f_n'(c)-f'(c)||x-x_0|+|f_n(x_0)-f(x_0)|,$$

de donde se concluye fácilmente teniendo en cuenta que $\lim f_n(x_0) = f(x_0)$ y la convergencia uniforme de $\{f_n'\}$. □

Vamos a aplicar los resultados anteriores a las series de funciones.

Definición 3.1.7. Una serie de funciones de un conjunto X con valores en $\mathbb{K}$ es una pareja de sucesiones $(\{f_n\}, \{F_n\})$, donde $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. $\{F_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie.

Para abreviar la notación representaremos la serie como $\sum f_n$.

El conjunto

$$\left\{ x \in X : \sum f_n(x) \text{ es convergente} \right\}$$

se llama dominio de convergencia de la serie.

Se dice que la serie $\sum f_n$ converge puntual o uniformemente a una función f si lo hace la sucesión de sumas parciales. En este caso escribiremos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$. La convergencia uniforme implica la puntual, como se deduce de lo visto hasta ahora.

Ejemplo. La serie de funciones complejas $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge punto a punto a la función $\frac{1}{1-z}$ en el disco abierto $D(0,1)$ y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado $\overline{D}(0,r)$ con $r < 1$..

En efecto, para $|z| < 1$ la serie es absolutamente convergente, luego convergente; su suma parcial n-ésima es

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

luego

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-z}\right|$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$ para cada $z \in D(0,1)$ fijo. Si además $|z| \leq r > 1$, entonces

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

y, como la sucesión numérica del último término converge a 0, se concluye la convergencia uniforme de la serie.

De los resultados vistos para sucesiones de funciones se deducen los análogos para series; enunciamos por ejemplo el criterio de Cauchy:

Proposición 3.1.8 (Criterio de Cauchy)**.** *Una serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en X si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ y $k \geq 0$ entonces*

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in X$.

También son válidos para series de funciones los resultados análogos a los vistos para sucesiones que relaionan los límites uniformes con integración y derivación.

Los siguientes resultados son útiles para estudiar la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Teorema 3.1.9 (Criterio M de Weierstrass)**.** *Sea $\sum f_n$ una serie de funciones. Si existe una serie convergente $\sum a_n$ de números reales no negativos tal que $|f_n(x)| \leq a_n$ para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum f_n$ converge uniformemente.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular y el criterio de Cauchy para series, puesto que para cada $x \in X$ se verifica:

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+k}(x)| < a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}.$$

□

Ejemplo. La serie $\sum \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, puesto que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

y la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Proposición 3.1.10 (Criterio de Dirichlet). *Sea $\sum f_n$ una serie de funciones cuyas sumas parciales están uniformemente acotadas y $\{g_n\}$ una sucesión decreciente de funciones reales que converge a 0 uniformemente. Entonces la serie $f_n g_n$ converge uniformemente.*

La demostración se puede consultar en la bibliografía.

En esta sección solamente hemos repasado dos tipos de convergencia, la puntual y la uniforme. Sin embargo hay muchos más modos de convergencia en los distintos espacios de funcione: en media cuadrática, en $\| \|_p$, en medida, etc. En distintas ramas del análisis matemático se suelen considerar espacios de funciones dotados de diversas topologías, y casi nunca se trata de espacios normados, sino más bien de espacios localmente convexos, cuya topología está definida por una familia de seminormas.

Si $(E, \| \|)$, podemos generalizar los conceptos de convergencia de sucesiones y series numéricas. En particular tenamos la siguiente

Definición 3.1.11. Diremos que la serie $\sum f_n$, donde $f_n \in E$, es normalmente convergente si la serie numérica $\sum \|f_n\|$ es convergente.

En un espacio de Banach toda serie normalmente convergente es convergente.

Si $(E, \| \|)$ es un espacio de funciones, es importante entender qué significa la convergencia en este espacio. Por ejemplo, una serie $\sum f_n$ converge a una función f si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k - f \right\| < \varepsilon.$$

Esto no implica, en general, la convergencia puntual, como se puede comprobar cuando se estudian las series de Fourier.

3.2. Series de potencias

Dado un número $z_0 \in \mathbb{C}$, una serie de potencias centrada en z_0 es una serie formal

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{C}$$

Mediante una traslación $z \mapsto z - z_0$, una serie de potencias centrada en z_0 se transforma en otra centrada en el origen; si la primera serie converge para un valor $z = z_1$, la serie trasladada converge en $z_1 - z_0$, y recíprocamente, luego si el dominio de convergencia de la serie trasladada al origen es D, el de la serie original será $z_0 + D$. Por tanto para el estudio de la convergencia podemos considerar series de potencias centradas en el origen.

Vamos a ver que las series de potencias convergen en discos.

Lema 3.2.1 (de Abel). *Sea $r_0 \in \mathbb{R}^+$; si la sucesión $\{a_n r_0^n\}$ está acotada, entonces la serie $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ es absolutamente convergente en cada punto del disco $|z - z_0| < r_0$.*

Demostración. Mediante una traslación podemos suponer que $z_0 = 0$. Si existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n r_0^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|a_n z^n| = |a_n r_0^n| \left| \frac{z}{r_0} \right| \leq M \left| \frac{z}{r_0} \right|;$$

cuando $|z| < r_0$ la serie $\sum \left|\frac{z}{r_0}\right|^n$ es convergente, luego también lo será $\sum |a_n z^n|$. $\square$

Proposición 3.2.2. *Sea $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias; existe un número real $R \geq 0$ tal que:*

1. *$\sum a_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente si $|z-z_0| < R$.*
2. *$\sum a_n(z-z_0)^n$ no es convergente si $|z-z_0| > R$.*

Llamaremos a R radio de convergencia de la serie $\sum a_n(z-z_0)^n$.

Demostración. Mediante una trslación podemos suponer que $z_0 = 0$. Sea

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ es convergente}\};$$

obviamente, $0 \leq R \leq +\infty$.

Si $R = 0$ no hay nada que decir; si $R > 0$ y $|z| < R$, entonces existirá $r \in \mathbb{R}$ tal que $|z| < r < R$ y la serie $\sum a_n r^n$ converge, y el lema de Abel asegura que la serie $\sum a_n z^n$ es normalmente convergente en el disco $|z| < r$.

Por otra parte, se $R < +\infty$ y $|z| > R$, la serie $\sum a_n z^n$ no puede ser convergente, de nuevo por el lema de Abel. $\square$

Observaciones 1. 1) No se puede afirmar nada para la circunferencia $|z-z_0| = R$; si el radio de convergencia de una serie de potencias es R, puede ocurrir que ésta converja en todos los puntos de dicha circunferencia, o en ninguno, o en unos sea convergente y en otros no. Por ejemplo, las series

$$\sum \frac{z^{2n}}{n}, \qquad \sum z^n \qquad \text{y} \qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

tienen radio de convergencia igual a 1; la primera de ellas converge, por ejemplo, para $z = i$ y diverge para $z = 1$; la segunda no converge en ningún punto de la circunferencia unidad, puesto que su término general no tiende a 0, y la tercera converge en todos los puntos de la circunferencia unidad.

2) Según el teorema anterior, cada serie de potencias complejas $\sum a_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergentes en cada punto del disco abierto de centro z_0 y radio R, lo que se denomina su círculo de convergencia. En el caso de las series de potencias reales $\sum a_n(x-x_0)^n$ los resultados anteriores también son válidos, y el disco de convergencia será el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Veamos cómo se calcula el radio de convergencia de una serie de potencias.

Proposición 3.2.3 (fórmula de Hadamard)**.** *El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_n(z-z_0)^n$ es igual a*

$$R = \frac{1}{\operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

si el denominador del segundo miembro de la igualdad es un número real no nulo, y será 0 *o* $+\infty$ *cuando el límite superior sea* $+\infty$ *o* 0*, respectivamente.*

Demostración. Podemos suponer que $z_0 = 0$; consideremos, pues, la serie $\sum a_n z^n$, y sea $r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |z|r,$$

del criterio de la raíz se deduce que si $|z|r < 1$ la serie converge absolutamente; en particular, si $r = 0$ la serie es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Si $|z|r > 1$ entonces la serie no converge, puesto que su término general no converge a 0. En particular, si $r = +\infty$ la serie no converge para valores no nulos de z, con lo que $R = 0$.

Cuando $0 < r < +\infty$, la serie $\sum a_n z^n$ converge absolutamente para $|z| < \frac{1}{r}$ y no converge cuando $|z| > \frac{1}{r}$, es decir, su radio de convergencia es $\frac{1}{r}$. $\square$

Corolario 3.2.4. *Si existe* $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *entonces su valor es igual al radio de convergencia de la seria* $\sum a_n(z - z_0)^n$.

Demostración. Si existe $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, entonces existe $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ y coinciden, de donde se concluye. $\square$

Ejemplo. Calculemos el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}.$$

En este caso $a_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n - 1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+2)}{n+1} = 2,$$

luego el radio de convergencia de la serie es igual a 2; su círculo de convergencia es, por tanto, el disco $D(-3, 2)$. Estudiemos la convergencia en los puntos de la frontera.

Si hacemos el cambio $w = \frac{z+3}{2}$ la circunferencia $|z + 3| = 2$ se corresponde con $|w| = 1$ y la serie se escribe $\sum \frac{w^n}{n+1}$. Como las sumas parciales de la serie $\sum w^n$ están acotadas por $\frac{2}{|1-z|}$ cuando $|w| = 1$, $w \neq 1$ y la sucesión $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ es decreciente y convergente a 0, por el criterio de Dirichlet para series numéricas la serie será convergente cuando $|z + 3| = 2$, $z \neq -1$. Cuando $z + 3 = 2$ la serie es $\sum \frac{1}{n+1}$, divergente.

Proposición 3.2.5. *Sea* $\sum a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* R. *Para cada* $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < r < R$ *la serie converge uniformemente en el disco cerrado* $\overline{D}(z_0, r)$*; como consecuencia, toda serie de potencias define una función continua en su círculo de convergencia.*

Demostración. Supongamos nuevamente que $z_0 = 0$. Si $|z| \leq r$, entonces $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ y, como $\sum |a_n| r^n$ es convergente, del criterio M de Weierstrass se deduce que la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en el disco $\overline{D}(0, r)$, luego define una función continua en este disco; como esto es cierto para cada $r < R$, la función será continua en $D(0, R)$. $\square$

Proposición 3.2.6. *Sea* $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* R. *Entonces* $f(z)$ *es derivable en* $D(z_0, R)$ *y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Demostración. Suponemos de nuevo que $z_0 = 0$, es decir, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si $z_1 \in D(0, R)$, sea r tal que $0 < r < R - |z_1|$; entonces

$$z = z_1 + (z - z_1) \qquad \Longrightarrow \qquad z^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} (z - z_1)^k,$$

luego en el disco $D(z_1, r)$ será

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} z_1^{n-k} (z - z_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_1^{n-k} \right) (z - z_1)^k,$$

El cambio en el orden de sumación está justificado porque para cada $z \in D(z_1, r)$ la serie es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_1|^{n-k} |z - z_1|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z_1| + |z - z_1|)^n$$

y, como $|z - z_1| < r$, será $|z_1| + |z - z_1| < R$ y por tanto la serie del úntimo término converge, puesto que cada serie de potencias es absolutamente convergente en su círculo de convergencia.

Escribamos entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k, \qquad b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_1^{n-k}.$$

Entonces

$$f'(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = b_1 + \lim_{x \to x_1} (z - z_1) \sum_{k=2}^{\infty} b_k (z - z_1)^{k-2}.$$

La función $g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k (z - z_1)^{k-2}$ está acotada en un entorno de z_1, porque si $|z - z_1| < r < R - |z_1|$ resulta que

$$|g(z)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| |z - z_1|^{k-2}$$

y esta serie es convergente en el disco $D(z_1, r)$. Por tanto

$$f'(z_1) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_1^{n-1}.$$

□

Como consecuencia del resultado anterior, las funciones definidas por series de potencias son de clase C^{∞}; si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^n$$

y, como se comprueba aplicando la fórmula de Hadamard, todas estas series tienen el mismo radio de convergencia que la serie $f(z)$.

3.3. Funciones analíticas

Definición 3.3.1. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$; una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en U si para cada punto $z_0 \in U$ existen un disco abierto $D(z_o, r) \subset U$ y una serie de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$ tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{para cada } z \in D(z_0, r).$$

De la proposición 3.2.6 y de la discusión que le sigue se deduce que toda función analítica es de clase C^∞. Además, la representación local de una función analítica como suma de una serie de potencias es única; en efecto, si en el disco $D(0, R)$ la función $f(z)$ se expresa como

$$f(z) = \sum_{n^0}^{\infty} a_n z^n,$$

de los resultados mencionados anteriormente se deduce que los coeficientes a_n son los coeficientes del desarrollo de Taylor de f en el origen, es decir,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

luego la representación de f como suma de una serie de potencias en el disco $D(0, R)$ es única.

Ejemplos. 1. Toda serie de potencias define una función analítica en su círculo de convergencia.

Consideremos la serie de potencias $\sum a_n z^n$ con radio de convergencia R. Si $z_0 \in D(0, R)$, sea R tal que $0 < r < R - |z_0|$; haciendo los mismos cálculos que en la demostración de la proposición 3.2.6 se tiene:

$$z = z_0 + (z - z_0) \qquad \Longrightarrow \qquad z^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k,$$

luego en el disco $D(z_0, r)$ será

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k,$$

de donde se concluye. En la demostración de la proposición 3.2.6 ya se ha justificado el cambio en el orden de sumación.

2) Se define la función exponencial compleja mediante la sere

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

su radio de convergencia es infinito, luego es una función analítica en $\mathbb{C}$.

3) Las funciones seno y coseno están definidas por las series

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}, \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Ambas funciones son analíticas en $\mathbb{C}$. Como veremos más adelante, $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ no están acotadas, a diferencia de lo que ocurre en el caso real.

En particular, cuando $z = ix$ se tiene la fórmula de de Moivre:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x).$$

Observación 1. En el capítulo siguiente veremos que toda función derivable en sentido complejo es analítica. Como sabemos, esto no es cierto en el caso real, puesto que incluso existen fnciones de clase C^∞ que no son analíticas. Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función es de clase C^∞ y todas sus derivadas en el origen son nulas, luego no puede coincidir con su serie de Taylor centrada en 0 en ningún entorno del origen.

Capítulo 4

Funciones holomorfas

4.1. La fórmula integral de Cauchy

En los temas anteriores hemos estudiado distintas propiedades las funciones de variable compleja: derivabilidad, analiticidad, etc. El siguiente teorema los relaciona y proporciona varias definiciones de función holomorfa, lo que será de utilidad en lo sucesivo.

Teorema 4.1.1. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es analítica en U.*
2. *f es de clase C^1 en U y derivable en sentido complejo en cada punto de U.*
3. *f es de clase C^1 en U y verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.*
4. *f es de clase C^1 en U y la forma diferencial $\omega = f(z)dz$ es cerrada, es decir, $d\omega = 0$.*
5. *f es continua en U, y para cualquier abierto V de cierre compacto $\overline{V}$ contenido en U que cumple las condiciones para ser una subvariedad con frontera de clase C^1 de U (condiciones del teorema de Stokes), se verifica la **fórmula integral de Cauchy:***
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{V}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \qquad \forall z_0 \in V.$$
6. *f es analítica en U y además, para cada $z_0 \in U$ la función $f(z)$ es representable como suma de una serie de potencias centrada en z_0 en el mayor disco D centrado en z_0 contenido en U. En el caso $U = \mathbb{C}$, también será $D = \mathbb{C}$.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Sea z_0 un punto de U; en cierto disco $D(z_0, R) \subseteq U$ la función f tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

y, según la proposición 3.2.6, f es derivable en cada punto $z \in D(z_0, R)$ y $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$; como la función f' está definida en $D(z_0, R)$ por una serie de potencias es continua en este disco, luego f es de clase C^1 en $D(z_0, R)$ (de hecho, de clase C^∞); como z_0 es cualquiera, $f \in C^1(U)$.

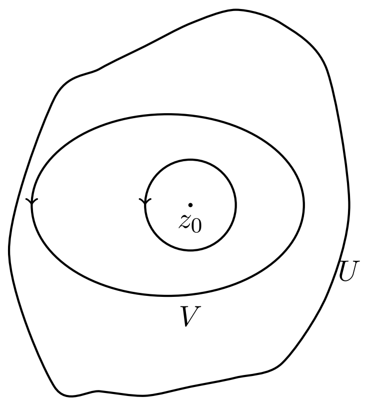
(2) $\Longrightarrow$ (3) Véase la discusión que conduce a las ecuaciones 2.1.

(3) $\Longrightarrow$ (4)

$$d(f(z)dz) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dz = 0,$$

ya que $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann).

(4) $\Longrightarrow$ (5) Sea $r > 0$ suficientemente pequeño para que el disco cerrado $\overline{D}(z_0, r)$ esté contenido en V; sea γ el borde de este disco.



En el abierto $W = V - \overline{D}(z_0, r)$ la 1-forma

$$\omega = \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

es cerrada; si denotamos $\hat{\gamma}$ al borde del disco $D(z_0, r)$ con la orientación opuesta, es decir, en sentido horario, el borde orientado de W es $\partial V \cup \hat{\gamma}$. Aplicando el teorema de Stokes resulta:

$$0 = \int_W d\omega = \int_{\partial W} \omega = \int \partial V \omega - \int_\gamma \omega,$$

luego

$$\int_{\partial V} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Para calcular esta última integral parametrizamos la circunferencia γ como $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con lo que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Esta integral no depende de r, y tomando límite cuando r tiende a 0 se tiene

$$\lim_{r \to 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt = 2\pi i f(z_0),$$

puesto que el límite conmuta con la integral ya que f es continua y estamos integrando en un intervalo compacto.

(5) $\implies$ (6) Sea $z_0 \in U$ y D un disco abierto centrado en z_0 tal que $\overline{D} \subset U$. Aplicando a D la fórmula integral de Cauchy, para cada $z \in D$ será

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta =$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1} d\zeta$$

Pero como $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$ es convergente y, de hecho, uniformemente convergente en ∂D, y su suma es igual a $\left(1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{-1}$, luego sustituyendo en la integral, queda

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \partial D \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right] (z - z_0)^n.$$

El cambio de la suma con la integral está justificado por la convergencia uniforme de la serie.

Sea
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

de modo que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$; los coeficientes de la serie no dependen del disco D, puesto que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$, luego este desarrollo es válido en cualquier or disco abierto centrado en z_0 contenido en U.

(6) $\implies$ (1) Es obvio, puesto que (1) es un caso particular de (6). □

Observaciones 2. 1. Según la fórmula integral de Cauchy, los valores de la función f en la frontera del abierto V determinan completamente la función en V.

2. Con las notaciones del final de la demostración del teorema anterior, los coeficientes a_n del desarrollo en serie de $f(z)$ son

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

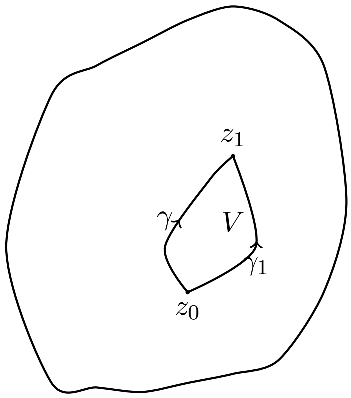
siendo D un disco centrado en z_0 de cierre contenido en U; si tomamos un abierto V con borde regular que contenga a $\overline{D}$ y tal que $\overline{V} \subset U$, la 1-forma $\omega = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$ es cerrada en el abierto $W = V - \overline{D}$, y del teorema de Stokes se deduce que

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial V} \omega.$$

3. En la segunda condición del teorema se exige que f sea derivable en sentido complejo en cada punto y además de clase C^1; esta segunda condición es consecuencia de la primera, como hemos visto en la sección 2.1.

4.2. Teoremas de Cauchy y Morera

Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y z_0, z_1 dos puntos de U unidos por dos curvas simples diferenciables a trozos, γ y γ_1 como en la figura; supongamos que la unión de dichas curvas es el borde de un abierto V contenido en U. Denotaremos $\hat{\gamma}$ a la curva γ con la orientación opuesta, de modo que el borde orientado de V es $\gamma_1 \cup \hat{\gamma}$.



Como f es holomorfa, la 1-forma $\omega = f(z)\,dz$ es cerrada, luego, por el teorema de Stokes,

$$0 = \int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma} \omega,$$

y por tanto

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma} \omega,$$

es decir, la integral de $f(z)\,dz$ entre los puntos z_0 y z_1 es la misma para dos curvas simples diferenciables a trozos cualesquiera γ y γ_1, siempre y cuando la unión de dichas curvas sea el borde de un abierto contenido en U. Las funciones $f(z)$ que cumplen esta propiedad se llaman integrables, luego hemos demostrado el

Teorema 4.2.1 (de Cauchy-Goursat). *Toda función holomorfa en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$ es integrable en U.*

Cuando U es un abierto simplemente conexo, es decir, si toda curva de Jordan en U es el borde de un abierto contenido en U, el teorema de Cauchy tiene un enunciado más simple: Si f es una función holomorfa en U, la integral de la 1-forma $f(z)\,dz$ sobre cualquier curva de Jordan en U es nula.

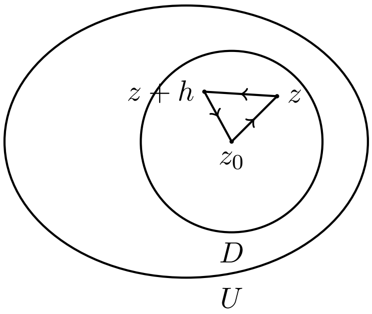
Recíprocamente:

Teorema 4.2.2 (de Morera). *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Si una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable en U, entonces es holomorfa en U.*

Demostración. Sea$z_0 \in U$ y D un disco centrado en z_0 contenido en U. Para cada $z \in U$ definimos

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

donde la integral se calcula sobre el segmento que une z_0 con z. Demostraremos que F es holomorfa en D y que $F' = f$, con lo que f también será holomorfa en D (F es analítica en D, y la derivada de una función analítica es analítica). Como D es cualquier disco contenido en U, f será holomorfa en U.



Sea $h \in \mathbb{C}$ tal que $z + h \in D$; entonces, como f es integrable,

$$F(z+h) = F(z) + \int_z^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta,$$

donde la integral se toma a lo largo del segmento que une z con $z + h$. Si parametrizamos dicho segmento como $\zeta = z + th, 0 \leq t \leq 1$, será

$$\int_z^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^1 f(z+th)h\, dt$$

y por tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 f(z+th)\, dt = f(z),$$

pusto que el límite conmuta con la integral por ser f continua. $\square$

Esta sección se puede completar con las diapositivas de Luis Navas correspondientes al tema 3 (antiderivadasholomorfas), donde se usa otro tipo de técnicas.

4.3. Desigualdades de Cauchy

Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, $z_0 \in U$ y D_r un disco de radio r centrado en z_0 cuyo cierre está contenido en U. Según hemos visto en la demostración del teorema 4.1.1, en el disco D_r la función f admite un desarrollo como suma de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Sea $M_r = \max\limits_{\zeta \in \partial D_r} |f(\zeta)$; entonces, parametrizando ∂D_r como $z = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ se tiene:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})|}{r^n}\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_r}{r^n}\, dt = \frac{M_r}{r^n},$$

es decir,

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n},$$

desigualdades que se conocen como desigualdades de Cauchy.

Teorema 4.3.1 (de Liouville)**.** *Toda función holomorfa en $\mathbb{C}$ y acotada es constante.*

Demostración. Si f es una función holomorfa en $\mathbb{C}$, tendrá un desarrollo como suma de una serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente en todo el plano. Si $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, de las desigualdades de Cauchy se deduce que para cada $r > 0$ se verifica:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

y tomando límite cuando $r \to \infty$ se deduce que $a_n = 0$ para $n \geq 1$, es decir, $f = a_0$. □

Corolario 4.3.2 (teorema fundamental del Álgebra)**.** *El cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, todo polinomio de grado ≥ 1 tiene alguna raíz en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio de grado ≥ 1; si no se anulase en ningún punto, la función $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ sería holomorfa en todo el plano y, como $\text{lím}\,|z| \to \infty f(z) = 0$, estaría uniformemente acotada, luego por el teorema de Liouville sería constante y, dado que el límite anterior es nulo, sería idénticamente nula, es decir, $\frac{1}{P(z)} = 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$, lo cual es absurdo. □

4.4. Prolongación analítica

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y denotemos $\mathcal{O}(U)$ al conjunto de las funciones holomorfas en U. $\mathcal{O}(U)$ es un anillo, puesto que si f, g son derivables en sentido complejo también lo serán $f + g$ y $f \cdot g$, y se verifican las reglas habituales de derivación de sumas y productos. Además, si una función $f \in \mathcal{O}(U)$ no se anula en ningún punto de U, entonces es invertible en $\mathcal{O}(U)$. Este anillo también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, luego es una $\mathbb{C}$-álgebra.

En el resto de esta sección supondremos que el abierto U es conexo.

Definición 4.4.1. Sea f una función holomorfa en U; diremos que un punto $z_0 \in U$ es un cero de f si $f(z_0) = 0$, y que es un cero de orden k de f si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Si z_0 es un cero de orden k de f, en un disco centrado en z_0 se tendrá un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_k \neq 0,$$

luego $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es una función holomorfa en un entorno de z_0 y $g(z_0) \neq 0$. La función g se puede prolongar a todo el abierto U como

$$g(z) = \begin{cases} a_k & \text{si } z = z_0 \\ \frac{f(z)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \end{cases}$$

y es holomorfa en U.

Recíprocamente, si $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g \in \mathcal{O}(U)$ y $g(z_0) \neq 0$, entonces tiene un cero de orden k en z_0.

Hemos demostrado que una función $f in \mathcal{O}(U)$ tiene un cero de orden k en un punto $z_0 \in U$ si y sólo si $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g \in \mathcal{O}(U)$ y $g(z_0) \neq 0$. Como g es continua y no se anula en z_0, será distinta de cero en todos los puntos de algún entorno V de z_0, luego el único cero de f en V será z_0. Hemos demostrado que los ceros de orden finito de una función holomorfa son aislados.

Veamos ahora que las funciones holomorfas no nulas no tienen ceros de orden infinito.

Dada una función $f \in \mathcal{O}(U)$, sea C el conjunto de puntos de U en los que se anulan f y todas sus derivadas. Como estas funciones son continuas, C es un subconjunto cerrado de U. Por otra parte, si $z_0 \in C$, como f es analítica en U admitirá un desarrollo como suma de una serie de potencias centrada en z_0 en algún disco $D(z_0, r)$ contenido en U; pero todos los coeficientes de dicho desarrollo son nulos, luego $D(z_0, r) \subset C$, lo que demuestra que C es abierto. Como U es conexo, C sólo puede ser el vacío o el abierto U.

Resumimos la discusión anterior en el siguiente

Teorema 4.4.2. *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Entonces:*

1. *Si f y todas sus derivadas se anulan en algún punto de U, entonces f es idénticamente nula en U.*

2. *Si f no es idénticamente nula en U y se anula en un punto $z_0 \in U$, entonces factoriza en la forma $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g \in \mathcal{O}(U)$ y $g(z_0) \neq 0$.*

3. *Si f no es idénticamente nula, el conjunto de ceros de f es discreto.*

Corolario 4.4.3. *El anillo $\mathcal{O}(U)$ es íntegro.*

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{O}(U)$ son distintas de cero, entonces sus conjuntos de ceros, que denotaremos $Z(f)$ y $Z(g)$, son discretos y, como $Z(f\dot{g}) \subseteq Z(f) \cup Z(g)$, este conjunto también será discreto, luego $f\dot{g}$ es distinta de cero. $\square$

Corolario 4.4.4 (Principio de prolongación analítica)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Si una función holomorfa en U es nula en todos los puntos de un abierto no vacío de U, entonces es idénticamente nula. En consecuencia, si dos funciones holomorfas en U coinciden en un subconjunto abierto no vacío, son idénticas.*

El corolario anterior, conocido también como principio de identidad, establece una diferencia esencial entre los anillos $\mathcal{O}(U)$ y $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Definición 4.4.5. Sean U, V abiertos conexos de $\mathbb{C}$; dadas dos funciones $f \in \mathcal{O}(u), g \in \mathcal{O}(V)$, diremos que g es una prolongación analítica de f si coincide con f en un abierto no vacío de $U \cap V$.

Del corolario anterior se deduce que no puede haber más de una prolongación analítica de f a un mismo abierto. Cuando $U \cap V$ es conexo, toda prolongación analítica de f coincide com f en $U \cap V$; pero si no lo es puede ocurrir que ambas funciones coincidan en una componente conexa de $U \cap V$, pero no necesariamente en todo este abierto.